Examen HAVO

2024

tijdvak 2
maandag 24 juni
13.30 - 16.30 uur

wiskunde B

Bij dit examen hoort een uitwerkbijlage.

Dit examen bestaat uit 16 vragen.
Voor dit examen zijn maximaal 74 punten te behalen.
Voor elk vraagnummer staat hoeveel punten met een goed antwoord behaald kunnen worden.

Als bij een vraag een verklaring, uitleg of berekening vereist is, worden aan het antwoord meestal geen punten toegekend als deze verklaring, uitleg of berekening ontbreekt.

Geef niet meer antwoorden (redenen, voorbeelden e.d.) dan er worden gevraagd. Als er bijvoorbeeld twee redenen worden gevraagd en je geeft meer dan twee redenen, dan worden alleen de eerste twee in de beoordeling meegeteld.

HA-1025-a-24-2-o

Ga verder op de volgende pagina.

Wortelgrafiek en parabool

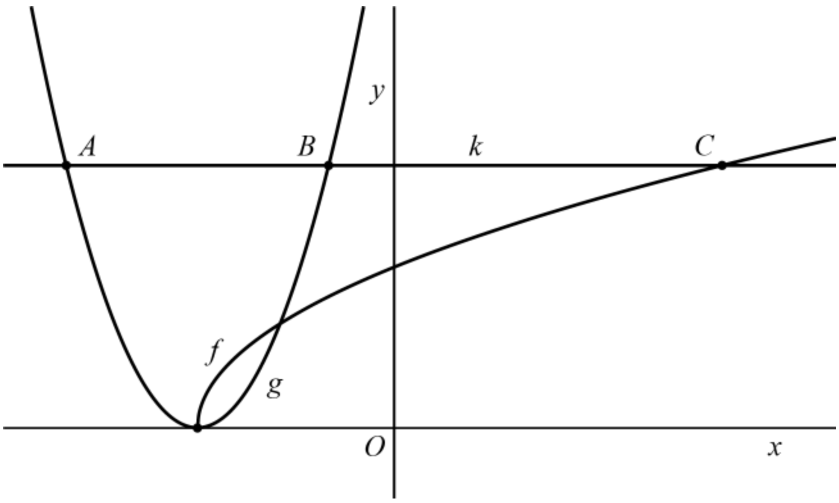
De functies f en g worden gegeven door $f(x) = \sqrt{2x+6}$ en $g(x) = x^2 + 6x + 9$.

De grafiek van f heeft een randpunt en de grafiek van g heeft een top.

4p **1** Onderzoek op exacte wijze of deze top hetzelfde punt is als dat randpunt.

De lijn k met vergelijking $y = 4$ snijdt de grafiek van g in de punten A en B, waarbij B rechts ligt van A. De lijn k snijdt de grafiek van f in het punt C. Zie de figuur.

figuur



5p **2** Bereken exact de afstand BC.

De lijn l raakt de grafiek van f in het punt met x-coördinaat 15.
De lijn m met vergelijking $6x + y = -27$ raakt de grafiek van g.

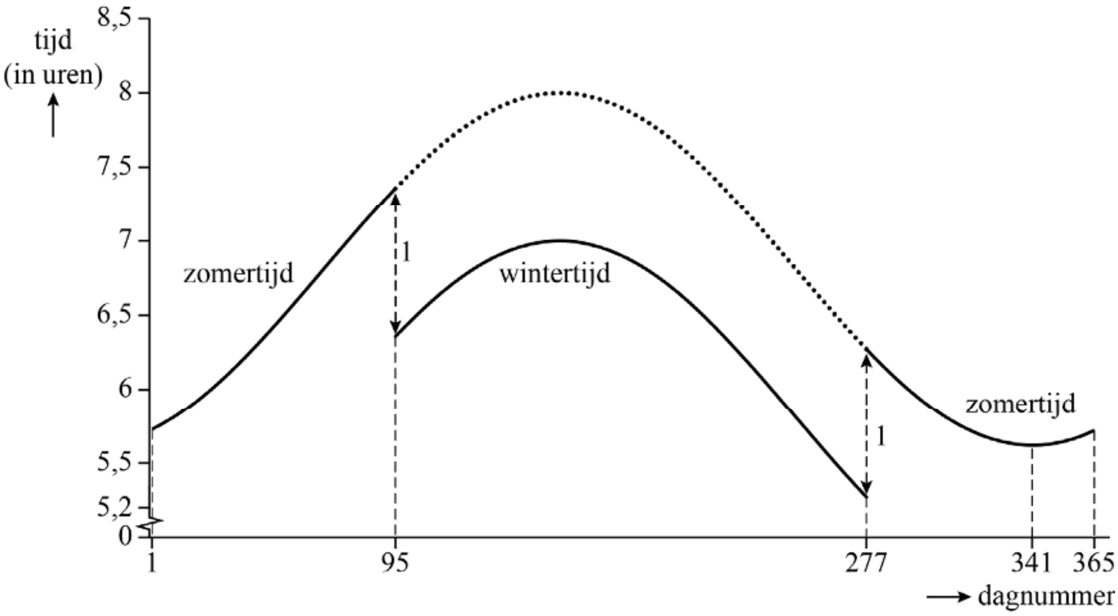
5p **3** Bewijs dat l en m loodrecht op elkaar staan.

Zonsopkomst en zonsondergang

Voor elke dag van het jaar is te bepalen hoe laat de zon opkomt en hoe laat de zon ondergaat.

Op elke dag van het jaar 2015 is volgens de lokale **zomertijd** bepaald hoe laat de zon in de Australische stad Sidney opkomt[1]. De 365 meetpunten zijn in een assenstelsel getekend. Ze liggen bij benadering op een sinusoïde. In figuur 1 is deze sinusoïde getekend; een deel daarvan is gestippeld.
Onder het gestippelde deel is de grafiek getekend volgens de tijdstippen van zonsopkomst volgens de **wintertijd**. De zonsopkomst volgens de wintertijd is 1 uur eerder dan volgens de zomertijd.

figuur 1 Zonsopkomst in Sydney



Het laagste punt van de grafiek van de **zomertijd** is $(341; 5{,}62)$.
Dit betekent dus dat de zon op dagnummer 341 volgens de zomertijd het vroegst opkomt. Dat is op tijdstip 5,62 (dus 5 uur en 37 min).
Het hoogste punt van het gestippelde deel van de grafiek van de zomertijd bevindt zich op hoogte 8,00.

noot 1 In Sidney is het zomer als het in Nederland winter is. De periode waarin de zomertijd wordt gebruikt, is daarom in Sidney anders dan in Nederland.

De grafiek van de **wintertijd** is te benaderen met een formule van de vorm:

$$S(t) = p + q\sin(\tfrac{2\pi}{365}(t - r))\text{, met } 95 \le t \le 277$$

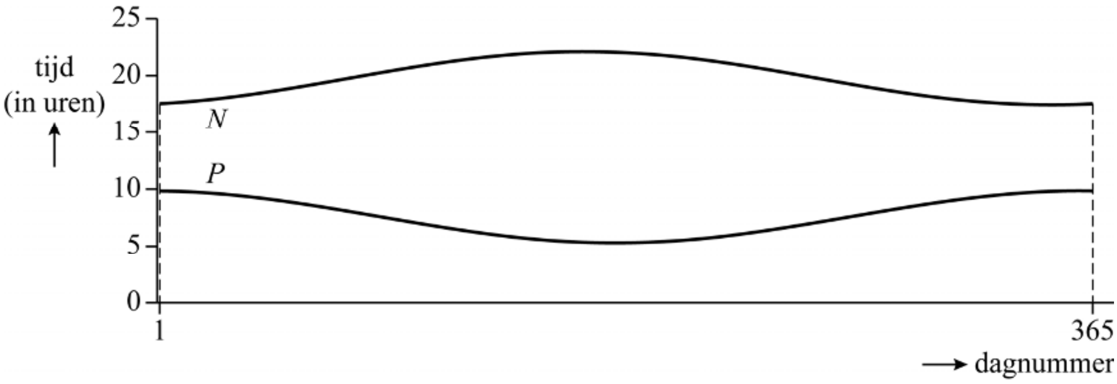
Hierin is S het tijdstip van zonsopkomst en t het dagnummer met $t = 1$ op 1 januari.

Door gebruik te maken van de grafiek van de **zomertijd** kunnen mogelijke waarden voor p, q en r worden berekend.

4p **4** Bereken mogelijke waarden voor p, q en r van $S(t)$. Geef je eindantwoorden in twee decimalen.

Voor een plaats in Nederland zijn op dezelfde manier als voor Sydney volgens de lokale zomertijd de tijdstippen van zonsopkomst bepaald. Ook zijn de tijdstippen van zonsondergang volgens de zomertijd bepaald. De grafieken waarop de meetpunten liggen, zijn in figuur 2 weergegeven.

figuur 2 Zonsopkomst en zonsondergang in Nederland



Bij de grafiek van de zonsopkomst hoort de formule:

$$P(t) = 7{,}57 + 2{,}27\sin(\tfrac{2\pi}{365}(t - 270{,}9))\text{, met } 1 \le t \le 365$$

en bij de grafiek van de zonsondergang hoort de formule:

$$N(t) = 19{,}78 + 2{,}33\sin(\tfrac{2\pi}{365}(t - 74{,}07))\text{, met } 1 \le t \le 365$$

Hierin is P het tijdstip van zonsopkomst en N het tijdstip van zonsondergang. Opnieuw is t het dagnummer met $t = 1$ op 1 januari. Voor t kunnen dus alleen gehele waarden worden ingevuld.

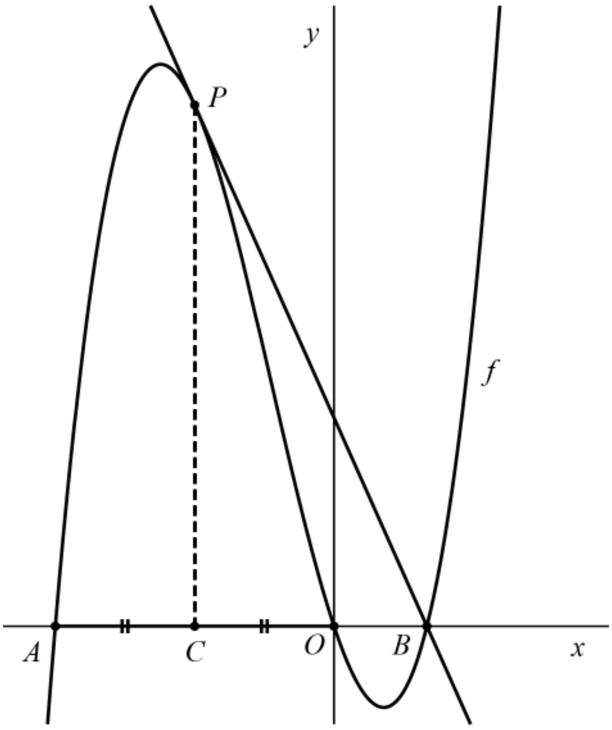
Voor elke dag kan de tijd tussen zonsopkomst en zonsondergang worden bepaald. De langste dag is de dag waarop deze tijd zo groot mogelijk is.

4p **5** Bereken de tijd tussen zonsopkomst en zonsondergang op de langste dag. Geef je eindantwoord in een geheel aantal uren en minuten.

Door het snijpunt

De functie f wordt gegeven door $f(x) = \frac{1}{4}x\left(x-2\right)\left(x+6\right)$.
De grafiek van f snijdt de x-as in de punten $A(-6, 0)$, $O(0, 0)$ en $B(2, 0)$.
Het punt C is het midden van lijnstuk AO. Het punt P ligt recht boven C op de grafiek van f. Zie de figuur.

figuur



De raaklijn aan de grafiek van f in P gaat door B.

7p **6** Bewijs dit.

Ga verder op de volgende pagina.

Borstcrawl

Bij het zwemmen van de borstcrawl is er een verband tussen de handkracht waarmee de handen van de zwemmer tegen het water duwen en de zwemsnelheid. Zie foto en figuur 1.

foto

Het verband tussen de handkracht F en de zwemsnelheid v kan worden benaderd door de formule:

$$F = 500 \cdot A \cdot C \cdot v^2$$

figuur 1

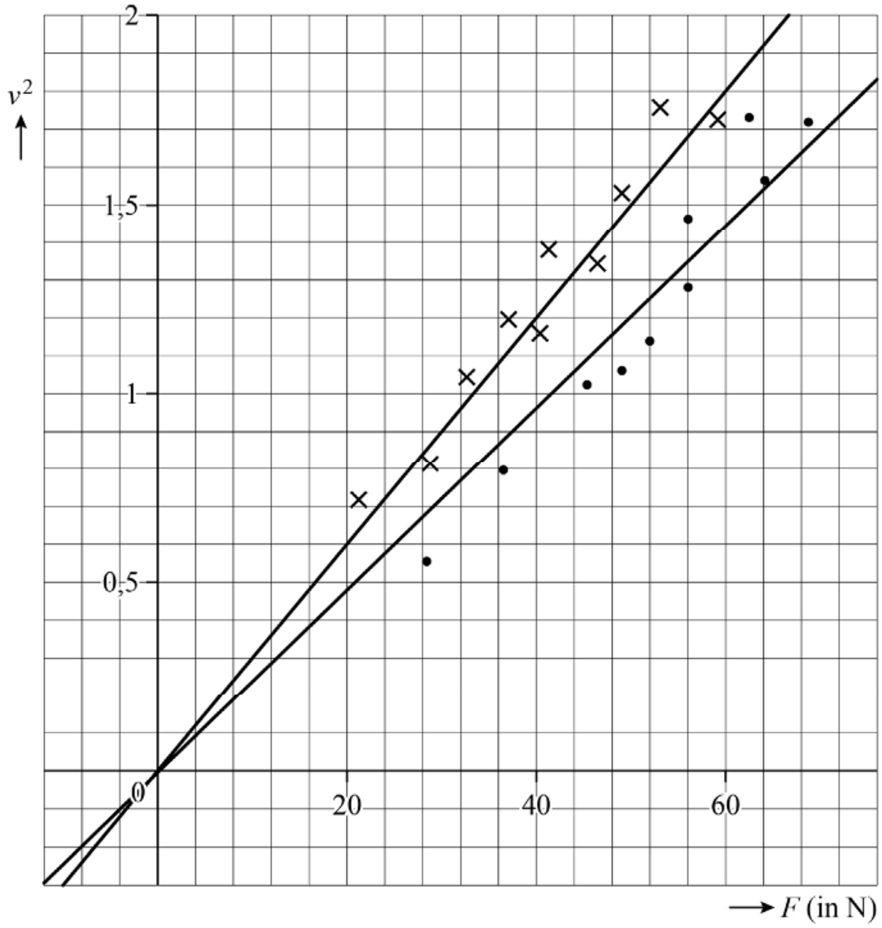
Hierin geldt:
- F is de handkracht in newton (N);
- v is de zwemsnelheid in meters per seconde (m/s);
- A is de oppervlakte van het vooraanzicht van de zwemmer in m^2 gedurende een zwemslag; A wordt frontaal oppervlak genoemd;
- C is een positieve constante die afhankelijk is van de zwemtechniek van de zwemmer.

Tijdens een zwemwedstrijd over 100 m zwemt Ian een persoonlijk record. Tijdens elke zwemslag is zijn handkracht 105 N en zijn frontaal oppervlak is 0,2 m^2. Zijn waarde van C is 0,35.
Samy wil bij een toekomstige zwemwedstrijd over 100 m 0,5 seconden sneller zwemmen dan de snelste tijd van Ian. Om dit te bereiken, gaat hij extra op handkracht trainen. Het frontaal oppervlak van Samy is 0,21 m^2. Zijn waarde van C is 0,33. In dit model nemen we aan dat Samy's waarden voor A en C gelijk blijven. Verder nemen we aan dat beide zwemmers met constante snelheid zwemmen.

6p **7** Bereken de handkracht die Samy nodig heeft om 0,5 seconden sneller te zwemmen dan de snelste tijd van Ian. Geef je eindantwoord als geheel getal.

Van twee zwemmers is 10 keer de handkracht gemeten bij verschillende snelheden. De techniek van de ene zwemmer is beter dan die van de andere zwemmer. Het frontaal oppervlak tijdens een zwemslag is voor beide zwemmers 0,2 m^2.
In figuur 2 zijn de meetresultaten weergegeven in een assenstelsel, waarbij v^2 is uitgezet tegen F. Voor beide zwemmers is een lijn getekend die de meetresultaten benadert. Bij elke lijn hoort een andere constante waarde van C, passend bij de zwemtechniek van de zwemmer. Figuur 2 staat ook op de uitwerkbijlage.

figuur 2

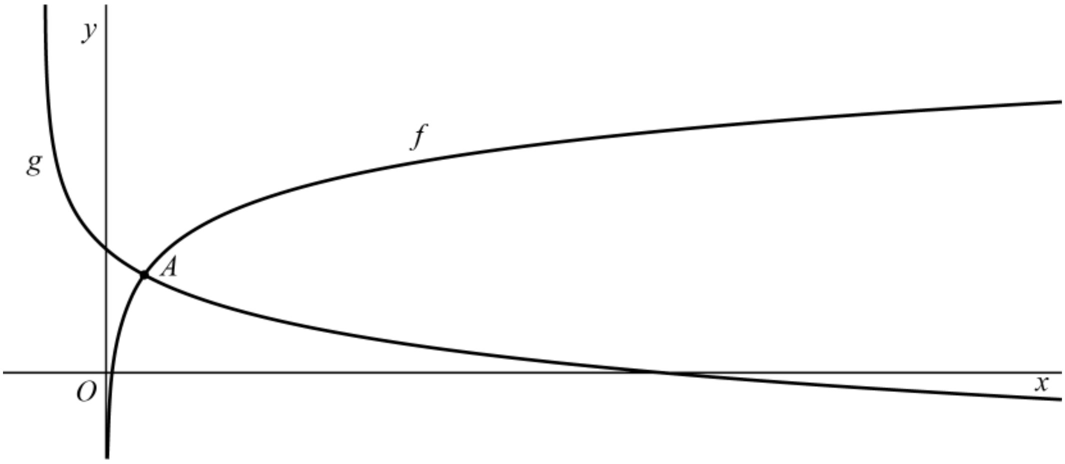


3p **8** Bereken met behulp van figuur 2 op de uitwerkbijlage de waarde van C van de zwemmer met de betere techniek. Geef hierbij aan welke lijn je hebt gebruikt en licht deze keuze toe. Geef je eindantwoord in twee decimalen.

Twee logaritmische functies

Voor $x > 0$ wordt de functie f gegeven door $f(x) = \log(x)$.
Voor $x > -10$ wordt de functie g gegeven door $g(x) = 2 - \log(x+10)$.
De grafieken van f en g snijden elkaar in het punt A. Zie figuur 1.

figuur 1



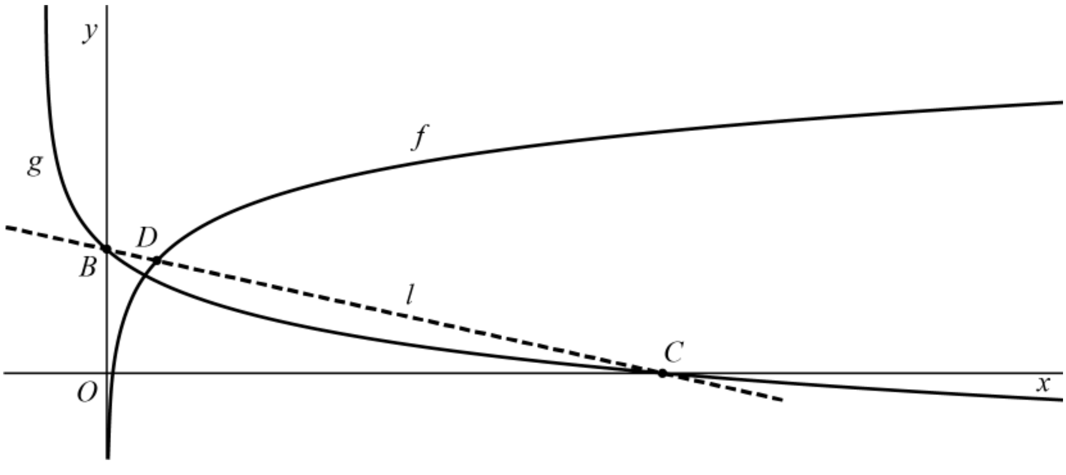
6p **9** Bereken exact de oplossing van de ongelijkheid $f(x) < g(x)$.

De grafiek van g ontstaat uit de grafiek van f door een serie transformaties. Hiervoor zijn verschillende mogelijkheden.

4p **10** Geef één zo'n serie transformaties en geef daarbij aan in welke volgorde ze worden toegepast.

De grafiek van g snijdt de y-as in het punt B en snijdt de x-as in het punt C. De lijn l gaat door B en C. Lijn l snijdt de grafiek van f in het punt D. Zie figuur 2.

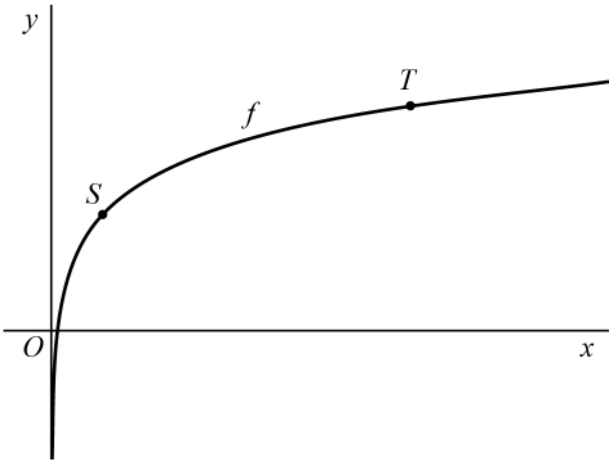
figuur 2



6p **11** Bereken de coördinaten van D. Geef de coördinaten in je eindantwoord in twee decimalen.

Op de grafiek van f wordt een willekeurig punt S gekozen. Punt T, met een x-coördinaat die 7 keer zo groot is als de x-coördinaat van S, ligt ook op de grafiek van f. In figuur 3 is de grafiek van f weergegeven met een mogelijke positie van S en van T.

figuur 3



In S en T kan met behulp van de grafische rekenmachine de helling worden bepaald.

Voor elke keuze van S is de uitkomst van de breuk $\dfrac{\text{helling in } T}{\text{helling in } S}$ hetzelfde.

3p **12** Bereken deze uitkomst. Geef je eindantwoord in twee decimalen.

Rondom exponentiële grafieken

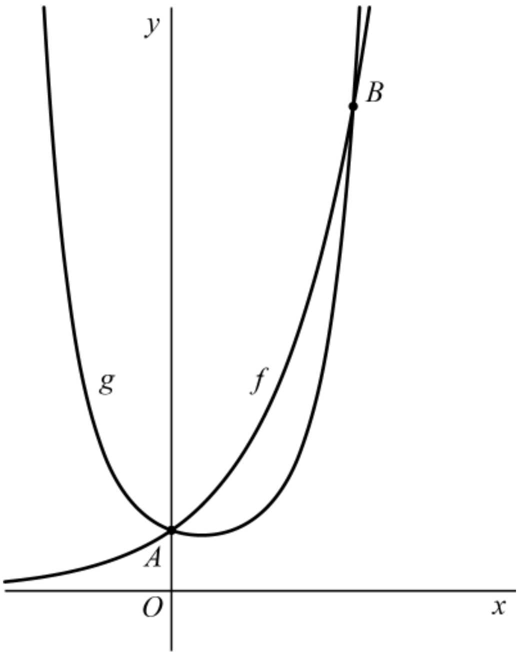
De functie f wordt gegeven door $f(x) = 2^x$.

De functie g wordt gegeven door $g(x) = \left(\sqrt{2}\right)^{x^2 - x}$.

De grafieken van f en g snijden elkaar in de punten $A(0,1)$ en $B(3,8)$.

In figuur 1 zijn de grafieken van f en g en de punten A en B weergegeven.

figuur 1

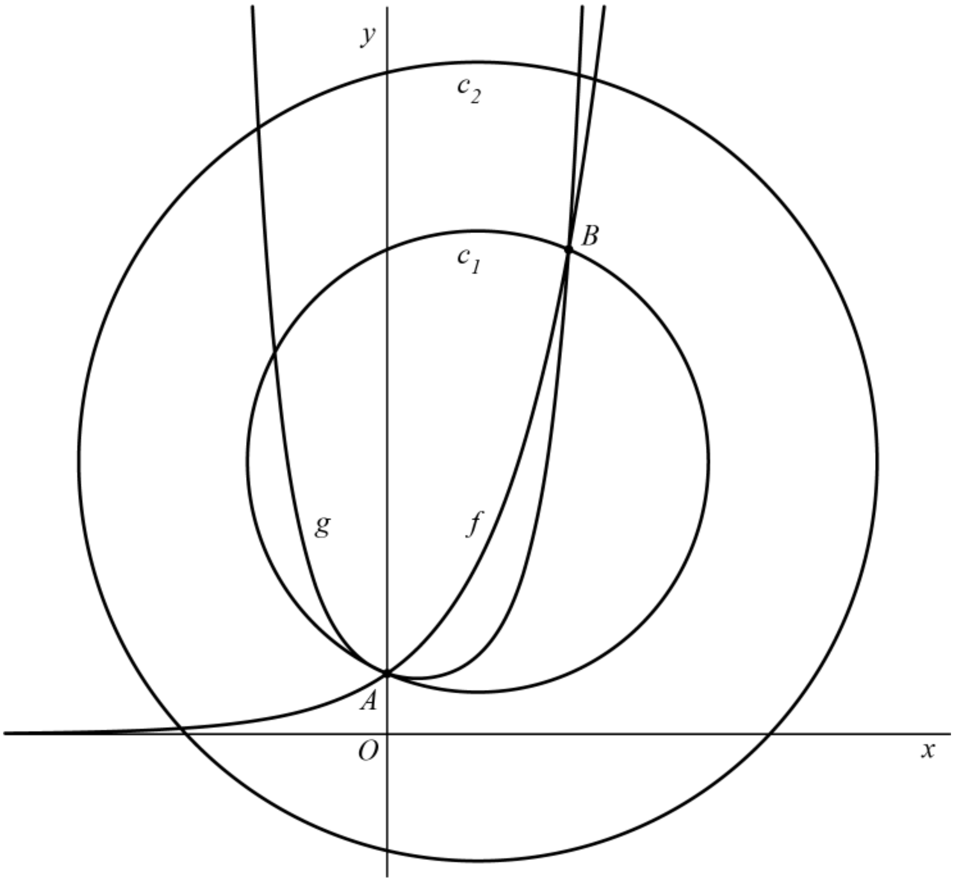


De punten A en B zijn de enige snijpunten van de grafieken van f en g.

3p **13** Bewijs dit.

In figuur 2 zijn opnieuw de grafieken van f en g met hun snijpunten A en B weergegeven. Ook zijn twee cirkels c_1 en c_2 weergegeven.
Het lijnstuk AB is een middellijn van c_1. Cirkel c_2 heeft hetzelfde middelpunt als c_1. De oppervlakte van c_2 is drie keer zo groot als de oppervlakte van c_1.

figuur 2

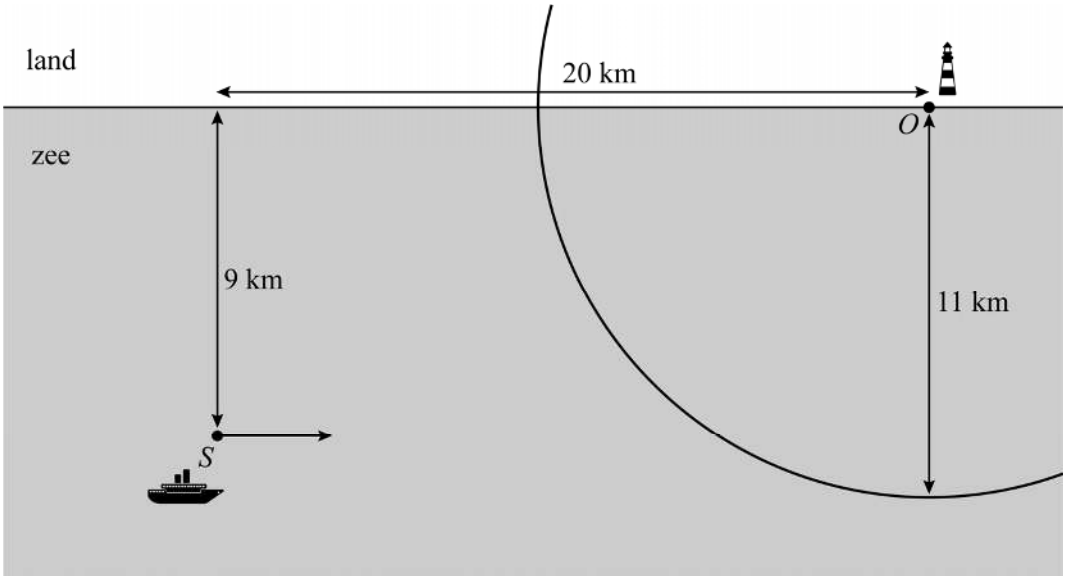


5p **14** Stel op exacte wijze een vergelijking op van cirkel c_2.

Vuurtorens

In figuur 1 is een rechte kustlijn weergegeven die van west naar oost loopt. Op deze kustlijn staat in punt O een vuurtoren. In punt S bevindt zich een schip op 9 km van de kustlijn. Het schip vaart evenwijdig aan de kustlijn. De horizontale afstand tussen O en S is 20 km. Het licht van de vuurtoren is zichtbaar binnen een straal van 11 km rondom de vuurtoren. Figuur 1 staat ook op de uitwerkbijlage.

figuur 1



In positie S is het licht van de vuurtoren nog niet zichtbaar voor de kapitein van het schip.

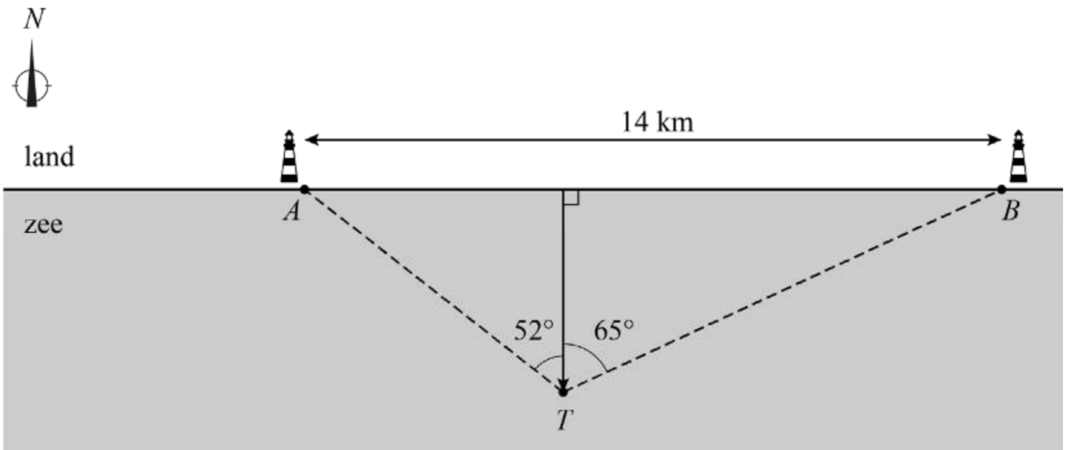
5p **15** Bereken na hoeveel kilometer varen het licht van de vuurtoren zichtbaar wordt. Geef je eindantwoord als geheel getal.

Let op: de laatste vraag van dit examen staat op de volgende pagina.

In een andere situatie staan twee vuurtorens A en B met een onderlinge afstand van 14 km op een rechte kustlijn. De kustlijn loopt van west naar oost.
De afstand van een schip tot de kustlijn wordt tegenwoordig met moderne navigatieapparatuur bepaald. Er is ook een methode zonder deze apparatuur, die in het verleden werd gehanteerd. Hierbij wordt het licht van de twee vuurtorens gebruikt. Vanaf het schip worden de hoeken gemeten waaronder het licht van de vuurtorens ten opzichte van de noordrichting N wordt gezien.

Vanaf een schip op positie T is deze hoek voor vuurtoren A $52°$ en voor vuurtoren B $65°$. Zie figuur 2. Deze figuur staat ook op de uitwerkbijlage.

figuur 2



Op basis van de twee gemeten hoeken en de onderlinge afstand van de vuurtorens, kan de afstand van het schip tot de kustlijn worden berekend.

4p **16** Bereken deze afstand in km. Geef je eindantwoord in één decimaal.

Bronvermelding
Een opsomming van de in dit examen gebruikte bronnen, zoals teksten en afbeeldingen, is te vinden in het bij dit examen behorende correctievoorschrift.